高等数学微积分公式大全

一、基本导数公式

(1) $(c)'=0$　(2) $x^{\mu}=\mu x^{\mu-1}$　(3) $(\sin x)'=\cos x$

(4) $(\cos x)'=-\sin x$　(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$　(6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$

(7) $(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$　(8) $(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$

(9) $(e^x)'=e^x$　(10) $(a^x)'=a^x\ln a$　(11) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

(12) $(\log_a^{\ x})'=\frac{1}{x\ln a}$　(13) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　(14) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(15) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$　(16) $(\operatorname{arc}\cot x)'=-\frac{1}{1+x^2}$ (17) $(x)'=1$ (18) $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

二、导数的四则运算法则

$(u\pm v)'=u'\pm v'$　$(uv)'=u'v+uv'$　$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

三、高阶导数的运算法则

（1） $\left[u(x)\pm v(x)\right]^{(n)}=u(x)^{(n)}\pm v(x)^{(n)}$　（2） $\left[cu(x)\right]^{(n)}=cu^{(n)}(x)$

（3） $\left[u(ax+b)\right]^{(n)}=a^n u^{(n)}(ax+b)$　（4） $\left[u(x)\cdot v(x)\right]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}c_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x)$

四、基本初等函数的 **n** 阶导数公式

（1） $\left(x^n\right)^{(n)}=n!$　（2） $\left(e^{ax+b}\right)^{(n)}=a^n\cdot e^{ax+b}$　(3) $\left(a^x\right)^{(n)}=a^x\ln^n a$

(4) $\left[\sin(ax+b)\right]^{(n)}=a^n\sin\left(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$　(5) $\left[\cos(ax+b)\right]^{(n)}=a^n\cos\left(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

(6) $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{a^n\cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$　(7) $\left[\ln(ax+b)\right]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{a^n\cdot(n-1)!}{(ax+b)^n}$

五、微分公式与微分运算法则

(1) $d(c)=0$　(2) $d\left(x^{\mu}\right)=\mu x^{\mu-1}dx$　(3) $d(\sin x)=\cos x dx$

(4) $d(\cos x)=-\sin x dx$　(5) $d(\tan x)=\sec^2 x dx$　(6) $d(\cot x)=-\csc^2 x dx$

(7) $d(\sec x)=\sec x\cdot\tan x dx$　(8) $d(\csc x)=-\csc x\cdot\cot x dx$

(9) $d\left(e^x\right)=e^x dx$　(10) $d\left(a^x\right)=a^x\ln a dx$　(11) $d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$

⑿ $d\left(\log_a{}^x\right)=\frac{1}{x\ln a}dx$ ⒀ $d\left(\arcsin x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ ⒁ $d\left(\arccos x\right)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

⒂ $d\left(\arctan x\right)=\frac{1}{1+x^2}dx$ ⒃ $d\left(\operatorname{arc}\cot x\right)=-\frac{1}{1+x^2}dx$

六、微分运算法则

(1) $d\left(u\pm v\right)=du\pm dv$ (2) $d\left(cu\right)=cdu$

(3) $d\left(uv\right)=vdu+udv$ (4) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$

七、基本积分公式

(1) $\int kdx=kx+c$ (2) $\int x^{\mu}dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+c$ (3) $\int\frac{dx}{x}=\ln\left|x\right|+c$

(4) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c$ (5) $\int e^x dx=e^x+c$ (6) $\int\cos xdx=\sin x+c$

(7) $\int\sin xdx=-\cos x+c$ (8) $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int\sec^2 xdx=\tan x+c$

(9) $\int\frac{1}{\sin^2 x}=\int\csc^2 xdx=-\cot x+c$ (10) $\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+c$

(11) $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+c$

八、补充积分公式

$\int\tan xdx=-\ln\left|\cos x\right|+c$ $\int\cot xdx=\ln\left|\sin x\right|+c$

$\int\sec xdx=\ln\left|\sec x+\tan x\right|+c$ $\int\csc xdx=\ln\left|\csc x-\cot x\right|+c$

$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$ $\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$

$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+c$ $\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+c$

九、下列常用凑微分公式

积分型	换元公式
$\int f\left(ax+b\right)dx=\frac{1}{a}\int f\left(ax+b\right)d\left(ax+b\right)$	$u=ax+b$
$\int f\left(x^{\mu}\right)x^{\mu-1}dx=\frac{1}{\mu}\int f\left(x^{\mu}\right)d\left(x^{\mu}\right)$	$u=x^{\mu}$
$\int f\left(\ln x\right)\cdot\frac{1}{x}dx=\int f\left(\ln x\right)d\left(\ln x\right)$	$u=\ln x$

$\int f\left(e^{x}\right)\cdot e^{x}dx=\int f\left(e^{x}\right)d\left(e^{x}\right)$	$u=e^{x}$
$\int f\left(a^{x}\right)\cdot a^{x}dx=\frac{1}{\ln a}\int f\left(a^{x}\right)d\left(a^{x}\right)$	$u=a^{x}$
$\int f\left(\sin x\right)\cdot\cos xdx=\int f\left(\sin x\right)d\left(\sin x\right)$	$u=\sin x$
$\int f\left(\cos x\right)\cdot\sin xdx=-\int f\left(\cos x\right)d\left(\cos x\right)$	$u=\cos x$
$\int f\left(\tan x\right)\cdot\sec^{2}xdx=\int f\left(\tan x\right)d\left(\tan x\right)$	$u=\tan x$
$\int f\left(\cot x\right)\cdot\csc^{2}xdx=\int f\left(\cot x\right)d\left(\cot x\right)$	$u=\cot x$
$\int f\left(\arctan x\right)\cdot\frac{1}{1+x^{2}}dx=\int f\left(\arctan x\right)d\left(\arctan x\right)$	$u=\arctan x$
$\int f\left(\arcsin x\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx=\int f\left(\arcsin x\right)d\left(\arcsin x\right)$	$u=\arcsin x$

十、分部积分法公式

(1)形如$\int x^{n}e^{ax}dx$，令$u=x^{n}$， $dv=e^{ax}dx$

形如$\int x^{n}\sin xdx$令$u=x^{n}$， $dv=\sin xdx$

形如$\int x^{n}\cos xdx$令$u=x^{n}$， $dv=\cos xdx$

(2)形如$\int x^{n}\arctan xdx$，令$u=\arctan x$， $dv=x^{n}dx$

形如$\int x^{n}\ln xdx$，令$u=\ln x$， $dv=x^{n}dx$

(3)形如$\int e^{ax}\sin xdx$， $\int e^{ax}\cos xdx$令$u=e^{ax},\sin x,\cos x$均可。

十一、第二换元积分法中的三角换元公式

(1) $\sqrt{a^{2}-x^{2}}$ $x=a\sin t$ (2) $\sqrt{a^{2}+x^{2}}$ $x=a\tan t$ (3) $\sqrt{x^{2}-a^{2}}$ $x=a\sec t$

【特殊角的三角函数值】

（1） $\sin 0=0$ （2） $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ （3） $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ （4） $\sin\frac{\pi}{2}=1$） （5） $\sin\pi=0$

（1） $\cos 0=1$ （2） $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ （3） $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ （4） $\cos\frac{\pi}{2}=0$ ） （5） $\cos\pi=-1$

（1） $\tan 0=0$ （2） $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ （3） $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ （4） $\tan\frac{\pi}{2}$不存在 （5） $\tan\pi=0$

（1）$\cot 0$ 不存在 （2）$\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$ （3）$\cot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ （4）$\cot\frac{\pi}{2}=0$ （5）$\cot\pi$ 不存在

十二、重要公式

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ （2）$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ （3）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}(a>o)=1$

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ （5）$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$ （6）$\lim\limits_{x\to-\infty}arc\tan x=-\frac{\pi}{2}$

（7）$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{arc}\cot x=0$ （8）$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{arc}\cot x=\pi$ （9）$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$

（10）$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=\infty$ （11）$\lim\limits_{x\to 0^{+}}x^{x}=1$

（12）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^{n}+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^{m}+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0} & n=m\\ 0 & n<m\\ \infty & n>m\end{cases}$ （系数不为 0 的情况）

十三、下列常用等价无穷小关系（$x\to 0$）

$\sin x\sim x$ $\tan x\sim x$ $\arcsin x\sim x$ $\arctan x\sim x$ $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2}$

$\ln(1+x)\sim x$ $e^{x}-1\sim x$ $a^{x}-1\sim x\ln a$ $(1+x)^{\partial}-1\sim\partial x$

十四、三角函数公式

1.两角和公式

$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ $\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

$\cot(A+B)=\frac{\cot A\cdot\cot B-1}{\cot B+\cot A}$ $\cot(A-B)=\frac{\cot A\cdot\cot B+1}{\cot B-\cot A}$

2.二倍角公式

$\sin 2A=2\sin A\cos A$ $\cos 2A=\cos^{2}A-\sin^{2}A=1-2\sin^{2}A=2\cos^{2}A-1$

$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^{2}A}$

3.半角公式

$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$ $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$

$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\frac{\sin A}{1+\cos A}$ $\cot\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}}=\frac{\sin A}{1-\cos A}$

4.和差化积公式

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2} \qquad \sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2} \qquad \cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\tan a+\tan b=\frac{\sin\left(a+b\right)}{\cos a\cdot\cos b}$$

5.积化和差公式

$$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}\left[\cos\left(a+b\right)-\cos\left(a-b\right)\right] \qquad \cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos\left(a+b\right)+\cos\left(a-b\right)\right]$$

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin\left(a+b\right)+\sin\left(a-b\right)\right] \qquad \cos a\sin b=\frac{1}{2}\left[\sin\left(a+b\right)-\sin\left(a-b\right)\right]$$

6.万能公式

$$\sin a=\frac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} \qquad \cos a=\frac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} \qquad \tan a=\frac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}$$

7.平方关系

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \qquad \sec^2 x-tan^2 x=1 \qquad \csc^2 x-\cot^2 x=1$$

8.倒数关系

$$\tan x\cdot\cot x=1 \qquad \sec x\cdot\cos x=1 \qquad csc\,x\cdot\sin x=1$$

9.商数关系

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

十五、几种常见的微分方程

1.可分离变量的微分方程：$\frac{dy}{dx}=f\left(x\right)g\left(y\right)$ ， $f_1\left(x\right)g_1\left(y\right)dx+f_2\left(x\right)g_2\left(y\right)dy=0$

2.齐次微分方程：$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$

3.一阶线性非齐次微分方程：$\frac{dy}{dx}+p\left(x\right)y=Q\left(x\right)$ 解为：

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q\left(x\right)e^{\int p(x)dx}dx+c\right]$$